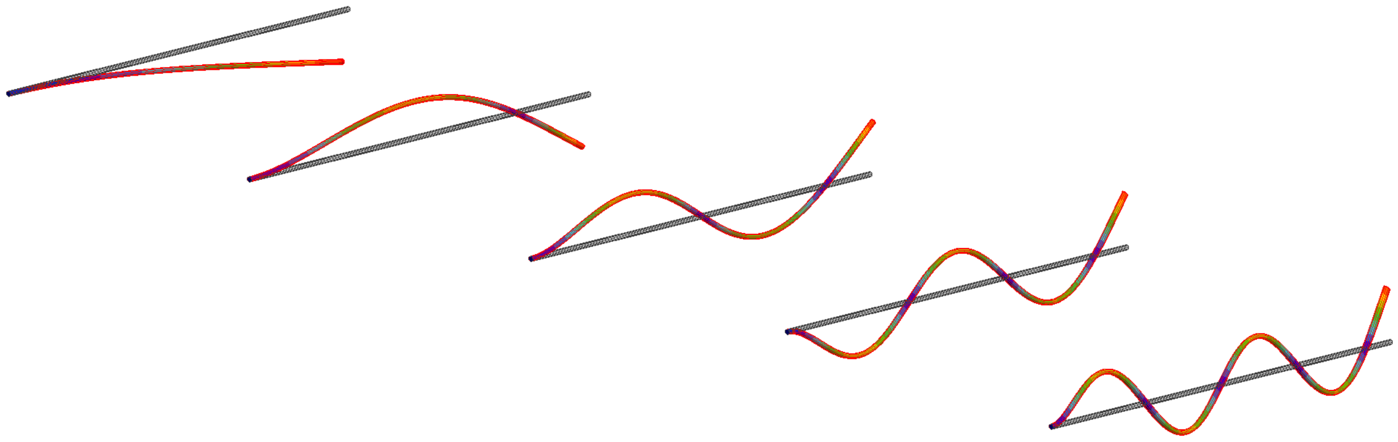
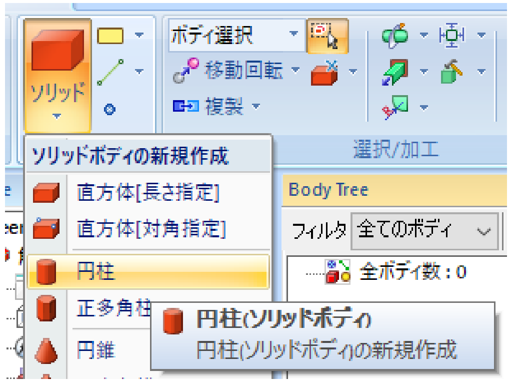
片持ち梁の共振周波数解析

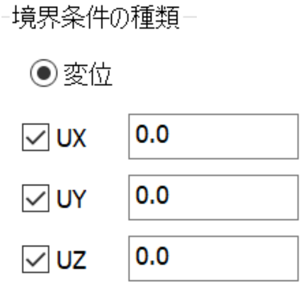


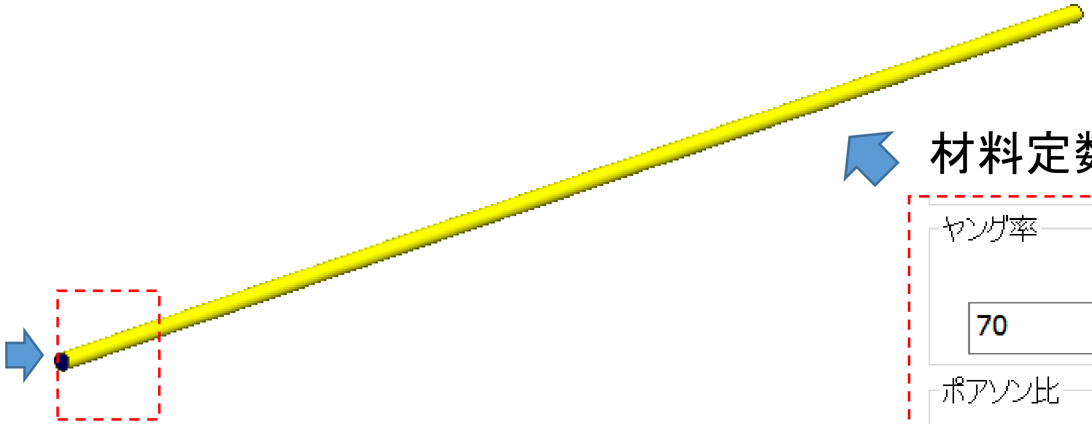
ムラタソフトウェア株式会社

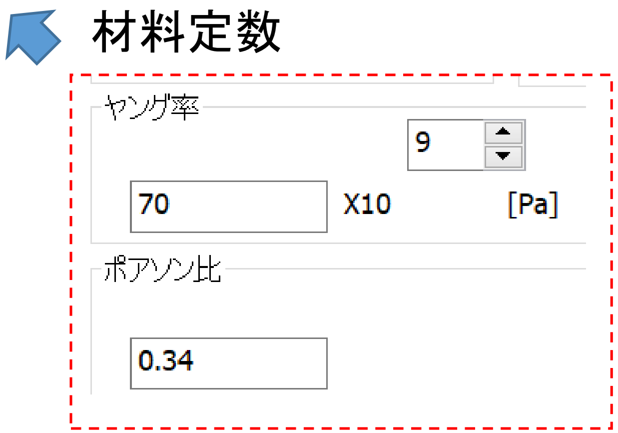
モデル作成、材料定数、境界条件設定

1. ソリッドボディ-円柱 中心点(0, 0, 0), 半径3.5mm, 高さ700mm
2. 解析条件⇒応力解析⇒共振解析⇒共振解析タブ(モード数10)を設定
3. 円柱ボディを選択し、右クリック⇒ボディ属性/材料定数
4. 材料名(test),ヤング率70GPa, ポアソン比0.34を入力
5. 片側端面に、変位固定の境界条件を設定
6. 標準メッシュサイズ3.0に設定
7. 解析条件⇒メッシュタブ⇒メッシュのコントロール⇒「2次要素の中間節点を曲線状に配置する」にチェック



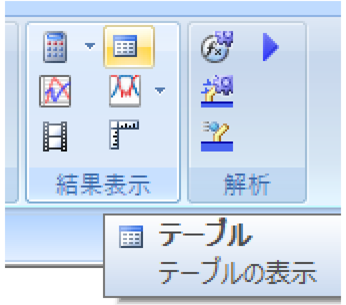




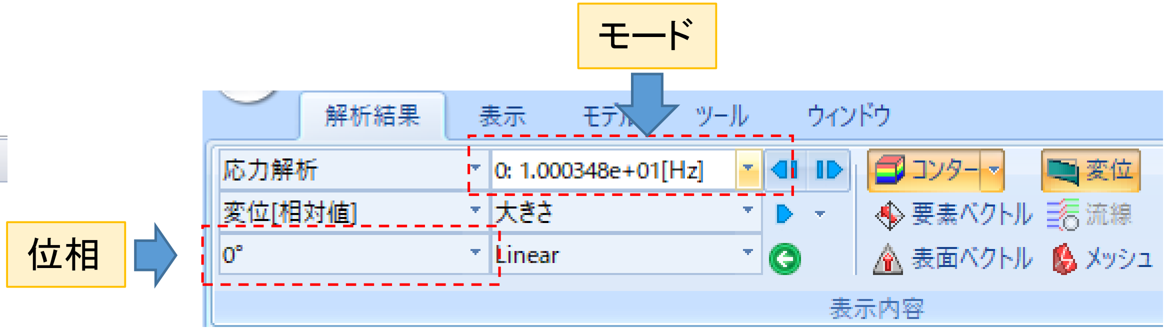


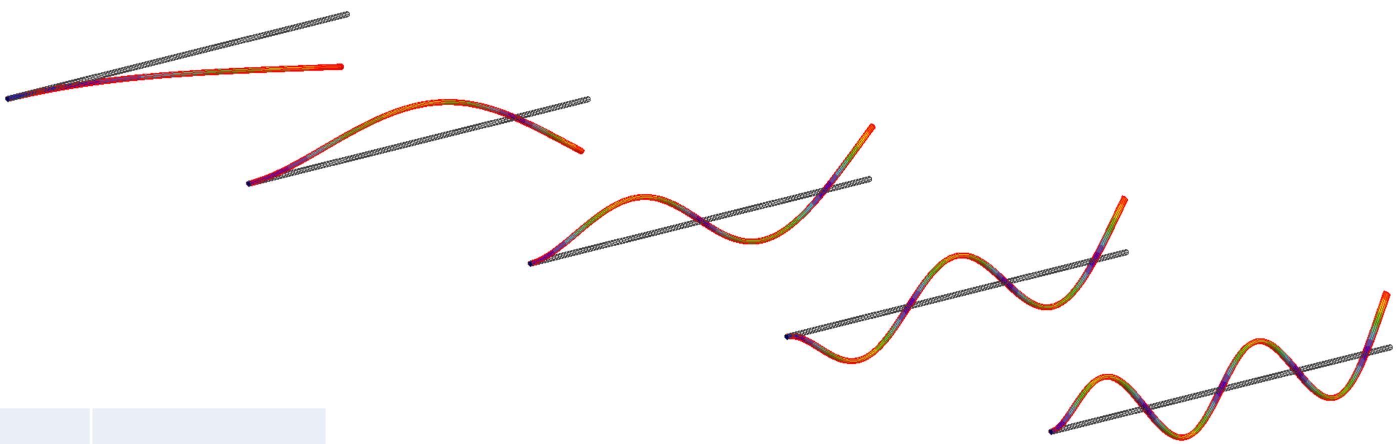
解析結果

- 共振周波数はテーブルで確認することができる
- 共振モードはフィールドで共振周波数における変形図で確認できる(アニメーション表示も可能)



	Freq
0: 1.000348e+01[Hz]	10.003
1: 1.000362e+01[Hz]	10.004
2: 6.266976e+01[Hz]	62.670
3: 6.267045e+01[Hz]	62.670
4: 1.753818e+02[Hz]	175.382
5: 1.753839e+02[Hz]	175.384
6: 3.434069e+02[Hz]	343.407
7: 3.434117e+02[Hz]	343.412
8: 5.670981e+02[Hz]	567.098
9: 5.671055e+02[Hz]	567.105

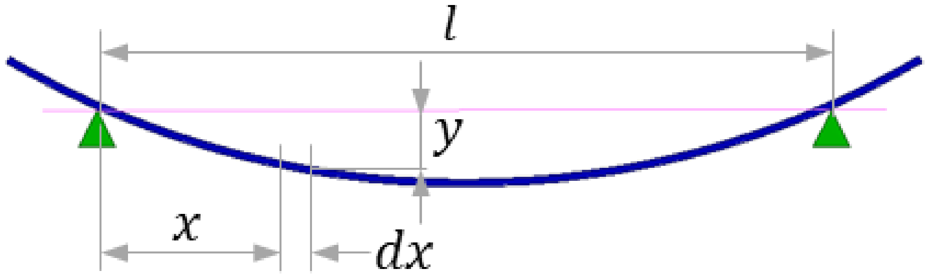




固有振動数 [Hz]					
理論値	9.992	62.621	175.358	343.638	567.998
解析結果	10.003	62.670	175.383	343.410	567.103

理論解とよく一致していることがわかる。

理論解　- 梁の固有振動数 -



図の断面一様な弾性梁を両端自由支持で横振動をさせる場合を考える。
梁を断面積: A 、質量: ρ 、縦弾性係数: E 、
断面二次モーメント: I とし、
支持点より任意の距離にある x 点の変位を y とする。

梁の長さ dx の部分に作用する力を考えると

慣性力＝ $-\rho A dx \dfrac{\partial y^2}{\partial t^2}$

この時、弾性力としては dx の部分の左右両面に作用する剪断力の差が働いている。
剪断力を S 、曲げモーメントを M とすると

剪断力 $S = \dfrac{\partial M}{\partial x}$　　曲げモーメント $M = -\dfrac{EI\partial^2 y}{\partial x^2}$

よって、 $dS = \dfrac{\partial S}{\partial x} dx = -EI \dfrac{\partial^4 y}{\partial x^4} dx$

dx の部分の力の釣り合いを考えると、運動方程式は $EI \dfrac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$

$y(x,t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ として、変数分離法により求められる一般解は

$$y(x) = C_1 \cosh\lambda + C_2 \sinh\frac{\lambda x}{l} + C_3 \cos\frac{\lambda x}{l} + C_4 \sin\frac{\lambda x}{l}$$

ここで、 $\lambda^4 = \omega^2 l^4 \dfrac{\rho A}{EI}$　　従って振動数 f は、 $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\lambda^2}{l^2}\sqrt{\dfrac{EI}{\rho A}}$

理論解　- 片持ち梁の固有振動数 -

片持ち梁の場合の境界条件は

固定端 $x = 0$ にて、　変位$= 0$ $\rightarrow y = 0$　傾き$= 0$ $\rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = 0$

自由端 $x = l$ にて、　モーメント$= 0$ $\rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$　剪断力$= 0$ $\rightarrow \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0$

よって、　$C_3 = -C_1$ 、$C_4 = -C_2$

$$C_1(\cosh\lambda + \cos\lambda) + C_2(\sinh\lambda + \sin\lambda) = 0$$

$$C_1(\sinh\lambda - \sin\lambda) + C_2(\cosh\lambda + \cos\lambda) = 0$$

C_1 と C_2 がゼロとならないための条件は、その係数行列式がゼロであるから

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \sin\lambda & \cos\lambda & -\sinh\lambda & -\cosh\lambda \\ \cos\lambda & -\sin\lambda & -\cosh\lambda & -\sinh\lambda \end{vmatrix} = 0$$

よって、振動方程式は　$\cos\lambda\cosh\lambda + 1 = 0$　となる。

片持ち梁において、断面を直径：dの円とすると固有振動数の式は

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{\lambda^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = \frac{\lambda^2}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}\frac{4}{\pi d^2}\frac{\pi d^4}{64}} = \frac{\lambda^2 d}{8\pi l^2}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

運動方程式　$\cos\lambda\cosh\lambda + 1 = 0$　の解を　Newton−Raphson法にて数値解析すると

λ_1=1.875　λ_2=4.694　λ_3=7.855　λ_4=10.996　λ_5=14.137　・・・となる。

例として、d=0.007 [m]、l =0.7 [m]、E=70 [GPa]、ρ=2800 [kg/m^3] を用いると

λ	1.875	4.694	7.855	10.996	14.137
固有振動数[Hz]	9.992	62.621	175.358	343.638	567.998